INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Universidade Técnica de Lisboa

Aula Teórica nº 30
LEM-2006/2007

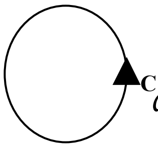
Prof. responsável de EO: Mário J. Pinheiro

Equações Fundamentais em regime variável

Nos capítulos precedentes verificámos que a equação da electrostática $rot\vec{E}^e = 0$ deveria ser substituída por $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, onde $\vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^i$. As equações $div\vec{E}^e = \frac{\rho + \rho'}{\varepsilon_0}$ (ou $div\vec{D} = \rho$) e $div\vec{B} = 0$ não sofrem qualquer alteração na passagem de uma situação estacionária para o regime variável. A única diferença é que agora $\rho = \rho(t)$.

A questão põe-se agora no que toca à equação $rot\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}')$ (ou $rot\vec{H} = \vec{J}$). Se aplicarmos o operador divergência a esta equação tem-se
$divrot\vec{H} = div\vec{J} = 0$,
Visto verificar-se $div \quad rotH\vec{\alpha} = 0$ para qualquer campo vectorial $\vec{\alpha}$. Tem-se assim $div\vec{J} = 0$, mas esta equação é a condição de corrente eléctrica estacionária. No caso do regime variável a equação $div\vec{J} = 0$ deve ser substituída pela equação da continuidade $div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Pode concluir-se assim que a equação $rot\vec{H} = \vec{J}$ (ou $rot\vec{B} = \mu_0(\vec{J} + \vec{J}')$) não é válida em regime variável no tempo. A questão é: com se deverá então passar-se a escrever esta equação?
Usando a equação da continuidade $div\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ e tendo em conta que $div\vec{D} = \rho$, podemos escrever:
[1]

com $\vec{C} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + rot\vec{Z}$. Assim, são agora as linhas da densidade de corrente $\vec{C}$ (densidade de corrente generalizada) que apresentam uma divergência nula, isto é, que têm as linhas de força fechadas.



$div\vec{C} = 0$

O último termo na expressão de $\vec{C}$ é uma consequência de se verificar $div \quad rot\vec{Z} = 0$, e portanto quando se escreve $\vec{C}$ a partir de $div\vec{C}$, o vector $\vec{C}$ só pode ser conhecido a menos de um termo arbitrário $rot\vec{Z}$

A equação para $rot\vec{H}$ toma então a forma $rot\vec{H} = \vec{C}$, visto ser $div \quad rot\vec{H} = div\vec{C} = 0$.

<u>Corrente de deslocamento</u> $\partial \vec{D} / \partial t$

Maxwell fez $rot\vec{Z} = 0$ e chamou <u>densidade de corrente de deslocamento</u> ao termo $\partial \vec{D} / \partial t$, pelo que a equação para $rot\vec{H}$ passa então a escrever-se sob a forma

$$\boxed{rot \quad \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

Esta equação significa que as fontes de circulação do vector excitação magnética $\vec{H}$ (ou, o que é o mesmo, do campo de indução magnética $\vec{B}$) encontram-se nos pontos onde $\vec{J} \neq 0$, isto é, onde há correntes eléctricas, ou nos pontos onde o vector deslocamento eléctrico $\vec{D}$ (ou seja, o campo eléctrico $\vec{E}$) é variável no tempo.

Considere-se, por exemplo, a situação em que o campo eléctrico é variável no tempo, de uma forma sinusoidal (Prob. 182):

$$E(t) = E_0 \cos(\omega t).$$

[2]

Diz-se que um <u>meio</u> se comporta como <u>condutor</u> quando a densidade de corrente de condução é superior à densidade de corrente de deslocamento

$$\left|\vec{J}\right| >> \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right| \Rightarrow \sigma_c >> \varepsilon \omega$$

E comporta-se como dieléctrico na situação inversa $\sigma_c << \varepsilon \omega$. Assim, um mesmo meio ($\sigma_c$ e ε fixos) pode apresentar $\left|\vec{J}\right| >> \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|$ para baixas frequências e $\left|\vec{J}\right| << \left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right|$ quando ω aumenta.

<u>Significado físico da corrente de deslocamento</u>

<u>Descarga de um condensador</u>

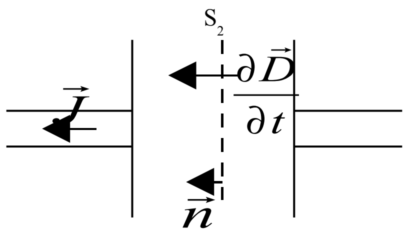
Considere-se um condensador carregado com uma carga q e suponhamos que a partir de um instante t=0 o condensador é descarregado pelo fecho do interruptor I.
[3]

O condensador descarrega-se assim sobre a resitência R, sendo $q(t) \rightarrow 0$ quanto $t \rightarrow \infty$
.
Vamos em primeiro lugar voltar a provar que a equação $rot\vec{H} = \vec{J}$ não funciona neste caso. Como se sabe, esta equação dá origem ao teorema de Ampère escrito sob a forma:
[4]

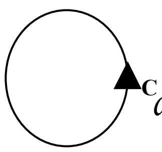
Considere-se a circulação γ em torno do condutor que sai da armadura da esquerda do condensador. A superfície S que se apoia no contorno γ tanto pode ser a superfície aberta S_1, ou a superfície aberta S_2, verificando-se para cada caso as normais assinaladas na figura:
[5]

O resultado a encontrar para o segundo membro deveria ser o mesmo, independentemente da superfície aberta que se considere. Note-se que não há corrnte eléctrica a atravessar a superfície S_2.
O absurdo que se encontrou é uma consequência de não se ter considerado a equação correcta para o regime variável $rot\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, escrevendo-se agora o teorema de Ampère sob a forma
[6]

A intensidade da corrente que sai da armadura é igual ao fluxo da corrente de deslocamento através da superfície S_2 que passa pelo interior do dieléctrico.



As linhas de corrente $\vec{C} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ são assim linhas fechadas, sendo $\vec{J} \neq 0$ no interior dos fios condutores e $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0$ no interior do dieléctrico:



$div\vec{C} = 0$

A corrente de deslocamento deve-se à influência eléctrica entre as armaduras
[7]

.

Diferença de potencial aos terminais de um condensador

Carga de um condensador

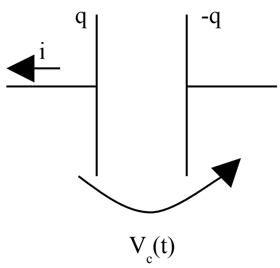
[8]

A corrente i vai fazer aumentar a carga da armadura, verificando-se portanto $i = \frac{dq}{dt}$.

A equação anterior pode escrever-se sob a forma:

[9]

Descarga de um condensador

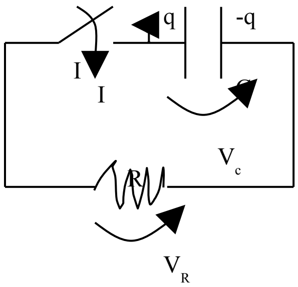


No caso da descarga de um condensador, tem-se

[10]

Circuito RC

Considere-se um condensador carregado com uma carga inicial q0 e que a partir do instante t=0 é descarregado sobre a resistência R por fecho do interruptor I.



[11]

RC tem as dimensões de um tempo, pelo que podemos fazer $\tau = RC$, esxcrevendo-se a equação diferencial de 1ª ordem homogénea sob a seguinte forma:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{\tau}$$

Esta equação pode ser resolvida pelo método da separação das variáveis:

[12]